# 关于Farey序列的一个研究

史娟荣

（安徽机电职业技术学院基础部，安徽 芜湖，241000）

1. 基本理论和概念

人们 100 多年前就发现了 Farey 序列，但它并没有得到实际的运用。直到近代，由于证明了数论中几个重要的难题，它才被人们逐渐重视起来。

定义 1.[2] n 级 Farey 序列指的是介于 0 和 1 之间的一个既约分数的序列, 且满足

$$\frac{a}{b}, \quad \gcd(a,b)=1, \quad 0\le a\le b\le n, \qquad (1)$$

并按其大小排列的诸分数。对n级Farey序列习惯用 $F_n$ 来表示。

例如：$F_7$ 为

$$\frac{0}{1},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{1}{1}.$$

定义 **2** (Euler 函数).[1] (Euler 函数) $\varphi(m)$ 指的是所有小于 m 且与 m 互素的整数的个数。

即 $\varphi(m)=\{n\,|\,1\le n\le m-1,$ 且 $\gcd(m,n)=1\}$ （2）

可以很容易地看出，$F_n$ 中共有 $1+\sum_{m=1}^{n}\varphi(m)$ 个数。这些数将[0,1]分为 $\sum_{m=1}^{n}\varphi(m)$ 份。

显然 $F_{n+1}$ 是由 $F_n$ 添加 $\varphi(n+1)$ 个数

$$\frac{a}{n+1}, \quad \gcd(a,n+1)=1, \quad 0< a \le n$$

而得到。

引理 1.[3] 令 $\xi$ 为一无理数，$0<\xi<1$. 取 n 级 Farey 级数，并设 $\frac{a_m}{b_m}<\xi<\frac{a_m'}{b_m'}$ 是二邻项，则

(1) $\frac{a_m}{b_m}$ 是 n 的递减函数，$\frac{a_m'}{b_m'}$ 是 n 的递增函数，

且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_m}{b_m}=\xi=\lim_{n\to\infty}\frac{a_m'}{b_m'}$ ；

(2) $b_m$ 及 $b'_m$ 是 n 的递增函数，且随 n 趋向无穷。

2. 命题及证明

命理 1. 令 $\frac{a}{b},\frac{a'}{b'}$ 为 $F_n$ 中相邻的二数，则有

$$b+b'\ge n+1.$$

若 $\frac{a}{b}<\frac{a'}{b'}$，则 $ba'-ab'=1$.

证明: 因 (a,b)=1, 故有整数 x,y,使

$$bx-ay=1, \quad n-b<y\le n. \qquad (3)$$

由此立得

$$y>0, \quad (x,y)=1, \quad \frac{x}{y}=\frac{a}{b}+\frac{1}{by}>\frac{a}{b}$$

今只需证明 $\frac{x}{y}=\frac{a'}{b'}$ 因为 这样就可得

$x=a', y=b', ba'-ab'=1,$ 且 $b+b'>n.$

现用反证法，设 $\frac{x}{y}\ne\frac{a'}{b'}$ 则 $\frac{a}{b}<\frac{a'}{b'}<\frac{x}{y}$，

得

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{x}{y}-\frac{a'}{b'}-\frac{a}{b}\ge\frac{1}{b'y}+\frac{1}{b'b}=\frac{b+y}{ybb'}>\frac{n}{ybb'}\ge\frac{1}{yb}$$

但由（3）知 $\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{1}{yb}$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

所以假设不成立，即 $\frac{x}{y}=\frac{a'}{b'}$ 得 ba'-ab'=1,

且 b+b'>n .

命理 2. 对任意的无理数 $\xi$，必有无数个有理数 $\frac{a}{b}$ 存在，使

$$\left|\xi - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,b^2} \qquad (4)$$

证明: 假定 0< $\xi$ <1, 作 n 级 Farey 序列。命 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{a'}{b'}$ 为二邻项，适合于 $\frac{a}{b}<\xi<\frac{a'}{b'}$ 令 $\omega=\frac{b'}{b}$

现分两种情况讨论：

1）假定 $\omega>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $\omega<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则由命题 1 知

$$\frac{a'}{b'}-\frac{a}{b}=\frac{1}{bb'}=\frac{1}{b^2\omega}$$

又由于

$$\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\sqrt{5}}(1+\frac{1}{\omega^2}) = -\frac{1}{\sqrt{5}\omega^2}(\omega^2-\sqrt{5}\omega+1)=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}\omega^2}[\omega-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)][\omega-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)]<0 ,$$

故 $\frac{a'}{b'}-\frac{a}{b}<\frac{1}{\sqrt{5}b^2}(1+\frac{1}{\omega^2})=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b'^2})$

即 $\frac{a}{b}+\frac{1}{\sqrt{5}b^2}>\frac{a'}{b'}-\frac{1}{\sqrt{5}b'^2}$

故 $(\frac{a}{b},\frac{a}{b}+\frac{1}{\sqrt{5}b^2})$ 与 $(\frac{a'}{b'}-\frac{1}{\sqrt{5}b'^2},\frac{a'}{b'})$ 中有部分相重合，因而必有一 $\xi$，即有

$$\left|\xi-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}b^2}\ ，或\left|\xi-\frac{a'}{b'}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}b'^2} \qquad (5)$$

2) 假定 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}>\omega>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 则

$$b+b'>\frac{\sqrt{5}+1}{2}b \quad ,\quad b+b'>\frac{\sqrt{5}+1}{2}b'$$

对于区间 $(\frac{a}{b},\frac{a+a'}{b+b'})$ 及 $(\frac{a+a'}{b+b'},\frac{a'}{b'})$ 皆可用（1）的方法，因而得出三种可能， 即除（5）式的两种形外的一种，还可能有

$$\left|\xi-\frac{a+a'}{b+b'}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}(b+b')^2}$$

对于一固定 n ，必有一组a,b适合于（4)，由于 $\xi$ 为无理数，有引理1知b及b' 随n趋于无穷，则得命题。

命理 3. 任一 n>1 ，Farey 序列 $F_n$ 中，相邻项分母必不相等。

证明:（反证法）假设有一 n 级 Farey 序列 $F_n$ 中，有两相邻项分母相同，设为 $\frac{a}{b}$， $\frac{a'}{b'}$

则有 a'>a，a'-a≥1，(a'-a)b>1 。

这与命题 1 得到的结果 a'b-ab=1 矛盾

假设不成立，故结论成立。

文稿责编 方孟雨

## 参考文献


[1] 潘承洞，潘承彪，初等数论(M)，北京：北京大学出版社,1992

[2] 朱尧辰，丢番图逼近引论(M)，北京：科学出版社，1997

[3] J. H. Conway and R. K. Guy. The Book of Numbers, Copernicus Press, NY, 1996, p152

[4] G. H. Hardy and E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers. 3rd ed., Oxford Univ. Press, 1954, p. 23


摘 要：早在一百多的年前，人们就发现了 Farey 序列，它是介于 0 和 1 之间满足一定的性质的一个有理

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

数列。但一直到近代才被得到真正的应用，特别是在近代数论中，也逐渐受到人们的重视。这里对于这个序列的性质进行了初步探讨研究，并根据这个性质得到关于有理数和无理数一些有趣的命题。

关键词: Farey 序列；有理数；Euler 函数。

中图分类号: O156.1 文献标识码: A 文章编号：1009-1114（2007）02-0034-03

**A Reseach on Farey Sequence**

**SHI Juan-rong**

**Abstract:** Farey sequence has been found one hundred years ago, they are the rational number sequence between 0 and 1. But they only got real application until today, especial in numbers theory. People pay more attention to them. In this paper, we make basic research on their proportion, and got some interesting property of rational number and irrational number.

**Keywords:** number theory; Farey sequence; rational number; Euler function.

收稿日期：2006-06-15

作者简介：史娟荣，女，1981年1月出生，安徽宣城人，2003年毕业于安徽师范大学数学与应用数学专业，助教。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net